7/10/15

Βιβλίο: Θεωρία Πιθανοτήτων και Στατιστικής. Παπαϊωάννου Εκδ. Σταμούλη

Πρόταση

Έστω $(S, \mathcal{A}, P)$ χώρος πιθανότητας. Τότε:

(α) Αν $A_i \in \mathcal{A}$, $i=1,\dots,n$ με $P(A_1\cap\dots\cap A_{n-1})>0$, $n\geq 2$, τότε

$P(A_1\cap A_2\cap\dots\cap A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)\cdots\cdots P(A_n|A_1\cap A_2\cap\dots\cap A_{n-1})$: Πολλαπλασιαστικός τύπος

(β) Αν $\{B_1,\dots,B_n\}$ είναι μια διαμέριση του S, δηλ. $B_i\subset S$ με $B_i\cap B_j=\emptyset$ $i,j=1,\dots,n$ και $\bigcup_{i=1}^{n} B_i = S$, τότε $\forall A\in\mathcal{A}$ $P(A)=\sum_{i=1}^{n} P(A|B_i)P(B_i)$ $\left(=\sum_{i=1}^{n} P(A\cap B_i)\right)$: Θεώρημα ολικής πιθανότητας

(γ) Επιπλέον, $\forall A\in\mathcal{A}$ με $P(A)>0$, $P(B_i|A)=\frac{P(A|B_i)P(B_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(A|B_i)P(B_i)}$ $\left(=\frac{P(A\cap B_i)}{P(A)}\right)$

Κανόνας Bayes

Ανισότητα Chebyshev

$P\{|X-\mu|\geq\varepsilon\}\leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$, $\varepsilon>0$, $\mu=E(X)$, $\sigma^2=Var(X)$

Ανισότητα Markov

$P\{h(X)\geq c\}\leq \frac{E[h(X)]}{c}$, $h(X)>0$, $c>0$

Ροπές κ-τάξης για τ.μ. X

Περί το μηδέν: $\mu_k = E(X^k)$, $\mu_1=\mu$

Κεντρικές: $\lambda_k = E(X-\mu)^k$, $\lambda_2=\sigma^2$

Τυπικές: $a_k = E\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^k$, a_3 = συντελεστής λοξότητας

a_4 = συντελεστής κυρτότητας

Παραγοντικές: $\mu_{(k)} = E[X(X-1)\cdots(X-k+1)]$

Ροπογεννήτρια συνάρτηση

$M_X(t)=E(e^{tX})$, $-h\leq t\leq h$

α) $\left.\frac{d^r M_X(t)}{dt^r}\right|_{t=0} = E(X^r)=\mu_r$

β) $M_X(t)=1+\sum_{r=1}^{\infty} \mu_r \frac{t^r}{r!}$

γ) $m_{aX+b}(t) = e^{bt} m_X(at)$

δ) $m_{X_1}(t) = m_{X_2}(t) \rightsquigarrow f_{X_1}(x) = f_{X_2}(x)$

ε) $m_{\sum_{i=1}^{n} X_i}(t) = m_{X_1}(t) + \dots + m_{X_n}(t)$, αν $X_1, \dots, X_n$ ανεξ. τ.μ.

<u>Πιθανογεννήτρια Συνάρτηση</u>

$g_X(t) = E(t^X)$

$$\left. \frac{d^r g_X(t)}{dt^r} \right|_{t=1} = \mu_{(r)} = E[X(X-1)\cdots(X-r+1)]$$

<u>Άσκηση 1.22</u>

$X \sim G(a=2, \beta)$

$$f_X(x) = \frac{1}{\beta^2 \Gamma(2)} x^{2-1} e^{-x/\beta}, \quad x > 0$$

Άρα $f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{1}{\beta^2}\left(e^{-x/\beta} - \frac{1}{\beta} x e^{-x/\beta}\right) = 0 \Rightarrow \frac{x}{\beta} = 1 \Rightarrow x = \beta = 2$

$$f_X(x) = \frac{1}{4} x e^{-x/2}, \quad x > 0$$

$$P(X \leq 9.49) = \int_0^{9.49} \frac{1}{4} x e^{-x/2} dx \overset{\frac{x}{2}=y}{=\!=} \int_0^{9.49/2} y e^{-y} dy = \int_0^{4.745} y(-e^{-y})' dy$$

$$= -ye^{-y}\Big|_0^{4.745} - \int_0^{4.745} (-e^{-y}) dy = -4.745 e^{-4.745} + 0 - e^{-y}\Big|_0^{4.745}$$

$$= -4.745 e^{-4.745} - e^{-4.745} + 1 = 1 - 5.745 e^{-4.745}$$

<u>Άσκηση 1.23</u>

$$f_X(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad x > 0, \quad E(X) = ?,\ Var(X) = ?,\ E(X^2) = ?$$

$$E(X) = \int_0^{\infty} \frac{2}{\sqrt{2\pi}} x e^{-x^2/2} dx = \int_0^{\infty} -\frac{2}{\sqrt{2\pi}} d(e^{-x^2/2}) = -\frac{2}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}\Big|_0^{\infty}$$

$$= -\frac{2}{\sqrt{2\pi}}(0-1) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \ (=\mu)$$

$\int_0^{\infty} f_X(x) dx = 1$

$$E(X^2) = \int_0^{\infty} \frac{2}{\sqrt{2\pi}} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \int_0^{\infty} \frac{-2x}{\sqrt{2\pi}} \left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right)' dx = \underbrace{-\frac{2x}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}\Big|_0^{\infty}}_{0} + \underbrace{\int_0^{\infty} \frac{2}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx}_{1} = 1$$

$$Var(X) = \sigma^2 = 1 - \frac{2}{\pi}$$